4 - الدوال الأسية

1 . تعريف الدالة الأسية

الدالة الأسية، و يرمز لها exp، هي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y' = y$ الذي يحقق $\exp(0) = 1$

الدالة الأسية معرفة على $\mathbb{R}$ حيث من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\exp'(x) = \exp(x)$ و $\exp(0) = 1$

2 . خواص

- خاصية 1: الدالة الأسية موجبة تماما على $\mathbb{R}$. (من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\exp(x) > 0$)
- خاصية 2: الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.(من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\exp'(x) > 0$)
- خاصية 3: الدالة الأسية مستمرة على $\mathbb{R}$.(الدالة exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ كونها حل للمعادلة التفاضلية $y' = y$).

3 . مبرهنة

من أجل كل عددين حقيقيين x و y ؛ $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

4 . نتائج

- من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
- من أجل كل عددين حقيقيين x و y ؛ $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- من أجل كل عدد حقيقي x و من أجل كل عدد صحيح n ؛ $[\exp(x)]^n = \exp(nx)$.

5 . الترميز

نضع من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\exp(x) = e^x$

إذن الدالة exp تكون معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $\exp(x) = e^x$.

6 . إستعمال الترميز

باستعمال الترميز e^x، نكتب : $e^0 = 1$ و $e^1 = e$ (e هو عدد أولر (Euler) حيث ... $e = 2,718$)

باستعمال الترميز e^x، نكتب أيضا :

- من أجل كل عددين حقيقيين x و y ؛ $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
- من أجل كل عددين حقيقيين x و y ؛ $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
- من أجل كل عدد حقيقي x و من أجل كل عدد صحيح n ؛ $(e^x)^n = e^{nx}$

7 . دراسة الدالة exp

- الدالة exp معرفة على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\exp(x) = e^x$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- الدالة exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $(e^x)' = e^x$.
- الدالة exp موجبة تماما على $\mathbb{R}$ (أي من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $e^x > 0$).

• الدالة exp متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ (من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $(e^x)' > 0$).

• الدالة exp مستمرة على $\mathbb{R}$.

لأنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

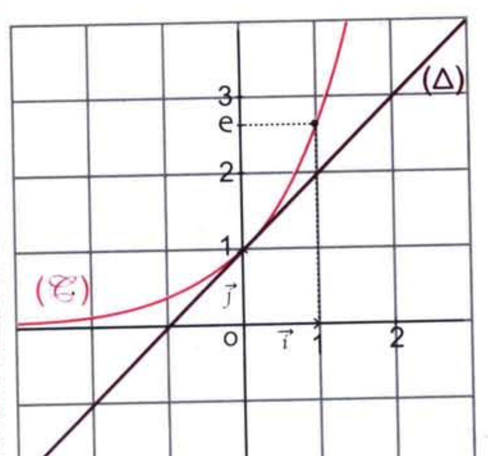
• جدول التغيرات الدالة exp يكون كما يلي :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\exp'(x)$	+
$\exp(x)$	$0 \nearrow +\infty$

• التمثيل البياني



ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة exp في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.



• معادلة المماس (Δ) للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند النقطة التي فاصلتها 0 هي : $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0)$

لدينا $\exp(0) = e^0 = 1$ و $\exp'(0) = e^0 = 1$

إذن $(\Delta) : y = x + 1$

• محور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$.

• المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرع قطع مكافئ في اتجاه محور التراتيب بجوار $+\infty$.

8. إشتقاق الدالة $x \longmapsto e^{u(x)}$

إذا كانت الدالة $x \longmapsto u(x)$ قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \longmapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I و من أجل كل عدد حقيقي x، $[e^{u(x)}]' = u'(x)\, e^{u(x)}$.

9. النهايات

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} x e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

10. خاصيتان

• من أجل كل عددين حقيقيين x و x' ؛ $e^x = e^{x'}$ إذا وفقط إذا كان $x = x'$.

• من أجل كل عددين حقيقيين x و x' ؛ $e^x < e^{x'}$ إذا وفقط إذا كان $x < x'$.

ملاحظة : يسمح تطبيق الخاصيتين السابقتين بحل معادلات و متراجحات في $\mathbb{R}$.

11. المعادلة التفاضلية $y' = y$

حلول المعادلة التفاضلية $y' = y$ هي الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = ke^x$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

1 إستعمال الترميز exp

تمرين 1

1 . احسب العدد $\exp[(0,5)]^2$ بدلالة $\exp(1)$. استنتج قيمة $\exp(0,5)$.

2 . عبر بدلالة $\exp(1)$ عن الأعداد التالية : $\exp(-2)$ ؛ $\exp(2-\sqrt{2})\times\exp(1+\sqrt{2})$

$\dfrac{\exp(0,5+x)}{\exp(1+x)}$ ؛ $[\exp(2)]^3$ ؛ $\dfrac{\exp(3)\times\exp(6)}{[\exp(4)]^2}$

حل

1 . حساب العدد $[\exp(0,5)]^2$ بدلالة $\exp(1)$.

لدينا $[\exp(0,5)]^2 = \exp(0,5)\times\exp(0,5)$

$= \exp(0,5+0,5)^2 = \exp(1)$

إذن $[\exp(0,5)]^2 = \exp(1)$

• استنتاج قيمة $\exp(0,5)$.

لدينا $[\exp(0,5)]^2 = \exp(1)$ و $\exp(1) > 0$ إذن $\exp(0,5) = \sqrt{\exp(1)}$.

2 . التعبير عن أعداد بدلالة $\exp(1)$.

• لدينا $\exp(-2) = \exp(0-2)$

$= \dfrac{\exp(0)}{\exp(2)} = \dfrac{1}{\exp(2)}$

و نعلم أن $\exp(2) = \exp(2\times1)$

$= [\exp(1)]^2$

إذن $\exp(-2) = \dfrac{1}{[\exp(1)]^2}$ أو أيضا $\exp(-2) = [\exp(1)]^{-2}$

• لدينا $\exp(2-\sqrt{2})\times\exp(1+\sqrt{2}) = \exp(2-\sqrt{2}+1-\sqrt{2})$

$= \exp(3)$

$= [\exp(1)]^3$

إذن $\exp(2-\sqrt{2})\times\exp(1+\sqrt{2}) = [\exp(1)]^3$

• لدينا $\dfrac{\exp(0,5+x)}{\exp(1+x)} = \exp(0,5+x-1-x)$

$= \exp(0,5-1)$

$= \exp(-0,5)$

$= \dfrac{1}{\exp(0,5)} = \dfrac{1}{\sqrt{\exp(1)}}$

إذن $\dfrac{\exp(0,5+x)}{\exp(1+x)} = \dfrac{1}{\sqrt{\exp(1)}}$

• لدينا $[\exp(2)]^3 = [(\exp(1)^2]^3$

$= [\exp(1)]^6$

إذن $[\exp(2)]^3 = [(\exp(1)]^6$

• لدينا $\dfrac{\exp(3)\times\exp(6)}{[\exp(4)]^2} = \dfrac{\exp(3+6)}{\exp(2\times4)} = \dfrac{\exp(9)}{\exp(8)}$

لدينا $= \exp(9-8) = \exp(1)$

إذن $\dfrac{\exp(3)\times\exp(6)}{[\exp(4)]^2} = \exp(1)$

2 استعمال الترميز e^x

تمرين 2

بسط العبارات التالية :

$\dfrac{2e^2\times e}{\sqrt{e}}$ ؛ $\dfrac{3\sqrt{e}}{e^3\times e^{-1}}$ ؛ $3e^{2x}(-2e^{-x+1})$ ؛ $\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2$ ؛ $\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$

$e^{-10x}\times(e^{-x+1})^2\times(e^{3x})^3$ ؛ $\left(\dfrac{e^{4x}+e^{-4x}}{2}\right)\left(\dfrac{e^{4x}-e^{-4x}}{2}\right)$ ؛ $\left(\dfrac{e^{-x+1}}{e^x-e^{-x}}\right)\times\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+1}\right)$

حل

• لدينا $\dfrac{2e^2\times e}{\sqrt{e}} = \dfrac{2e^{2+1}}{e^{\frac{1}{2}}} = 2e^3\times e^{-\frac{1}{2}} = 2e^{3-\frac{1}{2}} = 2e^{\frac{5}{2}}$

إذن $\dfrac{2e^2\times e}{\sqrt{e}} = 2e^{\frac{5}{2}}$

• لدينا $\dfrac{3\sqrt{e}}{e^3\times e^{-1}} = \dfrac{3e^{\frac{1}{2}}}{e^{3-1}} = \dfrac{3e^{\frac{1}{2}}}{e^2} = 3e^{\frac{1}{2}}\times e^{-2}$

$= 3e^{\frac{1}{2}-2} = 3e^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{e^{\frac{3}{2}}}$

إذن $\dfrac{3\sqrt{e}}{e^3\times e^{-1}} = 3e^{-\frac{3}{2}}$

• لدينا $3e^{2x}(-2e^{-x+1}) = 3(-2)\,e^{2x}\times e^{-x+1} = -6e^{2x-x+1} = -6e^{x+1}$

إذن $3e^{2x}(-2e^{-x+1}) = -6e^{x+1}$

• لدينا $\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{(e^x)^2+2e^xe^{-x}+(e^{-x})^2}{4}$

$= \dfrac{e^{2x}+2e^{x-x}+e^{-2x}}{4} = \dfrac{e^{2x}+2e^0+\frac{1}{e^{2x}}}{4} = \dfrac{e^{2x}+2+\frac{1}{e^{2x}}}{4}$

إذن $\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2x}+2+\frac{1}{e^{2x}}}{4}$

• لدينا $\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{(e^x)^2-2e^xe^{-x}+(e^{-x})^2}{4} = \dfrac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = \dfrac{e^{2x}-2+\frac{1}{e^{2x}}}{4}$

إذن $\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2x}-2+\frac{1}{e^{2x}}}{4}$

• لدينا $e^{-10x}\times(e^{-x+1})^2\times(e^{3x})^3 = e^{-10x}\times e^{2(-x+1)}\times e^{3(3x)} = e^{-10x}\times e^{-2x+2}\times e^{9x}$.

$$= e^{-10x-2x+2+9x} = e^{-3x+2}$$

إذن $e^{-10x}\times(e^{-x+1})^2\times(e^{3x})^3 = e^{-3x+2}$

• لدينا $\left(\frac{e^{4x}+e^{-4x}}{2}\right)\left(\frac{e^{4x}-e^{-4x}}{2}\right) = \frac{(e^{4x})^2-(e^{-4x})^2}{4} = \frac{e^{2(4x)}-e^{2(-4x)}}{4} = \frac{e^{8x}-e^{-8x}}{4} = \frac{e^{8x}-\frac{1}{e^{8x}}}{4}$

إذن $\left(\frac{e^{4x}+e^{-4x}}{2}\right)\left(\frac{e^{4x}-e^{-4x}}{2}\right) = \frac{e^{8x}-\frac{1}{e^{8x}}}{4}$

• $\left(\frac{e^{-x+1}}{e^{x}-e^{-x}}\right)\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}+1}\right) = \frac{e^{-x}\times e\,(e^{x}-1)(e^{x}+1)}{\left(e^{x}+\frac{1}{e^{x}}\right)(e^{x}+1)}$

$$= \frac{e^{-x}\times e\times(e^{x}-1)}{\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}}\right)} = \frac{e^{-x}\times e\times(e^{x}-1)\times e^{x}}{(e^{x}-1)(e^{x}+1)}$$

$$= \frac{e^{-x}\times e^{x}\times e}{e^{x}+1} = \frac{e^{-x+x}\times e}{e^{x}+1} = \frac{e^{0}\times e}{e^{x}+1} = \frac{e}{e^{x}+1}$$

إذن $\left(\frac{e^{-x+1}}{e^{x}-e^{-x}}\right)\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}+1}\right) = \frac{e}{e^{x}+1}$

3 حساب نهايات

تمرين 1

احسب النهاية عند $-\infty$ للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1. $f(x) = \frac{2e^{x}+1}{e^{x}-3}$
2. $f(x) = (2x-3)e^{x}$
3. $f(x) = 3e^{2x}-e^{x}+4$
4. $f(x) = \frac{e^{x+1}+\sqrt{e}}{1-e^{x}}$

حل

1 • لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2e^{x}+1}{e^{x}-3}\right)$

نعلم أن $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ إذن $\lim_{x\to-\infty}(2e^{x}+1) = 1$ و $\lim_{x\to-\infty}(e^{x}-3) = -3$

و بالتالي $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2e^{x}+1}{e^{x}-3}\right) = -\frac{1}{3}$ أي $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$.

2 • بما أن $\lim_{x\to-\infty} 2x\,e^{x} = 2\lim_{x\to-\infty} x e^{x} = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} 3e^{x} = 3\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$

إذن $\lim_{x\to-\infty}(2x-3)\,e^{x} = 0$. و بالتالي $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

3 • لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(3e^{2x}-e^{x}+4) = \lim_{x\to-\infty} 3e^{2x} + \lim_{x\to-\infty}(-e^{x}+4)$

$$= 0 + 4 = 4$$

إذن $\lim_{x\to-\infty}(2e^{2x}-e^{x}+4) = 4$. و بالتالي $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$.

4. لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{x+1}+\sqrt{e}}{1-e^x}\right)$

لدينا $\lim_{x\to-\infty} e^{x+1} = \lim_{x\to-\infty}(e^x \times e) = 0$ و $\lim_{x\to-\infty}(1-e^x) = 1$

إذن $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{x+1}+\sqrt{e}}{1-e^x}\right) = \frac{\sqrt{e}}{1} = \sqrt{e}$

و بالتالي $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{e}$.

تمرين 2

احسب النهاية عند $+\infty$ للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1. $f(x) = e^{2x} - x^2$
2. $f(x) = e^{2x} - 2e^x$
3. $f(x) = (3x^2 - 1)e^x$
4. $f(x) = e^{3x+1} - 3x$

حل

1. لدينا $\lim_{x\to+\infty}(e^{2x} - x^2) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{e^{2x}}{x^2} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left[\left(\frac{e^x}{x}\right)^2 - 1\right]$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{e^x}{x}\right)^2 - 1\right] = +\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty} x^2\left[\left(\frac{e^x}{x}\right)^2 - 1\right] = +\infty$ و بالتالي $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. لدينا $\lim_{x\to+\infty}(e^{2x} - 2e^x) = \lim_{x\to+\infty} e^x(e^x - 2)$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(e^x - 2) = +\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty} e^x(e^x - 2) = +\infty$ و بالتالي $\lim_{x\to+\infty}(e^{2x} - 2e^x) = +\infty$

ينتج أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. لدينا $\lim_{x\to+\infty}(3x^2 - 1) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty}(3x^2 - 1)e^x = +\infty$

و بالتالي $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4. لدينا $e^{3x+1} - 3x = e^{3x} \times e - 3x = 3x\left(e\frac{e^{3x}}{3x} - 1\right)$

و لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left(e\frac{e^{3x}}{3x} - 1\right) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} 3x = +\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty} 3x\left(\frac{e^{3x}}{3x} - 1\right) = +\infty$ و بالتالي $\lim_{x\to+\infty}(e^{3x+1} - 3x) = +\infty$

ينتج أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4 تعيين دوال مشتقة

تمرين

عين المجموعة التي تقبل عليها الدالة f الإشتقاق ثم عين الدالة المشتقة f' في كل حالة من الحالات التالية :

1. $f(x) = xe^{x} + x^2$
2. $f(x) = \dfrac{e^{x}+1}{x}$
3. $f(x) = (2x-3)e^{3x-1}$
4. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{2x-1}$

حل

1. $f(x) = xe^{x} + x^2$

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = e^{x} + xe^{x} + 2x$

$= (x+1)\,e^{x} + 2x$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = (x+1)\,e^{x} + 2x$

2. $f(x) = \dfrac{e^{x}+1}{x}$

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty\,;0[$ و $]0\,;+\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ؛ $f'(x) = \dfrac{e^{x}(x) - (e^{x}+1)}{x^2}$

$= \dfrac{(x-1)\,e^{x} - 1}{x^2}$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ؛ $f'(x) = \dfrac{(x-1)\,e^{x} - 1}{x^2}$

3. $f(x) = (2x-3)\,e^{3x-1}$

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = 2e^{3x-1} + (2x-3)\times 3e^{3x-1}$

$= (2+6x-9)e^{3x-1} = (6x-7)e^{3x-1}$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = (6x-7)\,e^{3x-1}$.

4. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{2x-1}$

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$ و $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

و من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن $\frac{1}{2}$ ؛ $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}(2x-1) - 2e^{2x}}{(2x-1)^2}$

$= \dfrac{4(x-1)\,e^{2x}}{(2x-1)^2}$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن $\frac{1}{2}$ ؛ $f'(x) = \dfrac{4(x-1)e^{2x}}{(2x-1)^2}$

5 حل معادلات و متراجحات

تمرين 1

حل في $\mathbb{R}$ كل معادلة من المعادلات التالية :

$e^{3x} = 1$ ؛ $e^{2x} - e^{x} = 0$ ؛ $e^{x^2} = e$ ؛ $3e^{2x} - e^{x} - 1 = 0$ ؛ $e^{4+x^2} - e^{-4x} = 0$

حل

1 • حل المعادلة $e^{3x} = 1$

لدينا $e^{3x} = 1$ يعني $e^{3x} = e^{0}$ أي $3x = 0$

و بالتالي $x = 0$. ينتج أن المعادلة $e^{3x} = 1$ تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$ و هو 0.

2 • حل المعادلة $e^{2x} - e^{x} = 0$.

لدينا $e^{2x} - e^{x} = 0$ يعني $e^{2x} = e^{x}$ أي $2x = x$ و بالتالي $x = 0$.

ينتج أن المعادلة $e^{2x} - e^{x} = 0$ تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$ و هو 0.

3 • حل المعادلة $e^{x^2} = e$.

لدينا $e^{x^2} = e$ يعني $x^2 = 1$ أي $(x - 1)(x + 1) = 0$. و بالتالي $x = 1$ و $x = -1$.

ينتج أن المعادلة $e^{2x} = e$ تقبل حلين مختلفين في $\mathbb{R}$ هما 1 و 1- .

4 • حل المعادلة $3e^{2x} - 2e^{x} - 1 = 0$ ... (1) نضع $e^{x} = x$.

$3e^{2x} - 2e^{x} - 1 = 0$ يعني $\begin{cases} 3x^2 - 2x - 1 = 0 \\ e^{x} = x \end{cases}$ أي $\begin{cases} (3x + 1)(x - 1) = 0 \\ e^{x} = x \end{cases}$

إذن $\left(x = 1 \text{ أو } x = -\frac{1}{3}\right)$ و $e^{x} = x$. ينتج أن $e^{x} = 1$ أو $e^{x} = -\frac{1}{3}$.

لدينا $e^{x} = 1$ إذن $x = 0$.

المعادلة $e^{x} = -\frac{1}{3}$ لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$ (لأن من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{x} > 0$)

و بالتالي $3e^{2x} - 2e^{x} - 1 = 0$ تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$ و هو 0.

5 • حل المعادلة $e^{4+x^2} - e^{-4x} = 0$.

لدينا $e^{4+x^2} - e^{-4x} = 0$ يعني $e^{4+x^2} = e^{-4x}$ أي $4 + x^2 = -4x$

أي $x^2 + 4x + 4 = 0$ أي $(x + 2)^2 = 0$ إذن $x = -2$.

ينتج أن المعادلة $e^{4+x^2} - e^{-4x} = 0$ تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$ و هو 2-.

تمرين 2

حل في $\mathbb{R}$ كل متراجحة من المتراجحات التالية :

$e^{-2x} \geq 1$ ؛ $e^{1+x^2} \leq e^{2x}$ ؛ $e^{x^2} e^{x} < (e^2)^3$.

حل

1 . حل المتراجحة $e^{-2x} \geq 1$ في $\mathbb{R}$.

لدينا $e^{-2x} \geq 1$ يعني $e^{-2x} \geq e^0$ أي $-2x \geq 0$ إذن $x \leq 0$

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة $e^{-2x} \geq 1$ هي $]-\infty ; 0]$.

2 . حل المتراجحة $e^{1+x^2} \leq e^{2x}$ في $\mathbb{R}$.

لدينا $e^{1+x^2} \leq e^{2x}$ يعني $1 + x^2 \leq 2x$ أي $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ أي $(x - 1)^2 \leq 0$

إذن $x = 1$.

إذن المتراجحة $e^{1+x^2} \leq e^{2x}$ تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$ هو 1.

3 . حل المتراجحة $e^{x^2} e^{x} < (e^2)^3$ في $\mathbb{R}$.

لدينا $e^{x^2} e^{x} < (e^2)^3$ يعني $e^{x^2+x} < e^6$ أي $x^2 + x < 6$ أي $x^2 + x - 6 < 0$.

لدينا $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$

إذن $x^2 + x - 6 < 0$ يعني $(x - 2)(x + 3) < 0$

و بالتالي $x \in]-3 ; 2[$

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة $e^{x^2} e^{x} < (e^2)^3$ هي $]-3 ; 2[$.

تمارين و حلول نموذجية

مسألة

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - 2 - e^{-x}$

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2. استنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $+\infty$.

حدد الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ).

3. اثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(x) = e^{-x} (xe^{x} - 1) - 2$

استنتج $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

ادرس سلوك المنحنى $(\mathscr{C})$ الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$.

4. ادرس تغيرات الدالة f .

5. اثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $2 < x_0 < 3$.

6. ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$.

7. احسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ)

و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 3$ و $x = \lambda$ ؛ $\lambda > 3$.

ما هي نهاية $A(\lambda)$ لما يؤول λ إلى $+\infty$ ؟

حل

1. حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$. لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 2) = +\infty$. إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2. استنتاج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا (Δ).

لدينا $f(x) = ax + b + \phi(x)$ حيث $a = 1$ ، $b = -2$ و $\phi(x) = e^{-x}$.

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi(x) = 0$ فإن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 2$ هو المستقيم المقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

3. من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $e^{-x} (xe^{x} - 1) - 2 = xe^{-x} e^{x} - e^{-x} - 2$

$$= x - 2 - e^{-x} = f(x)$$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(x) = e^{-x}(xe^{-x} - 1) - 2$

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-x} = -\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x}(xe^{-x} - 1) - 2 = -\infty$

ينتج أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$.

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{e^{-x}}{x}\right)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = -\infty$

إذن $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

ينتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرع قطع مكافئ بجوار $-\infty$.

4. دراسة تغيرات الدالة f.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = 1 + e^{-x}$.

من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $e^{-x} > 0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) > 0$.

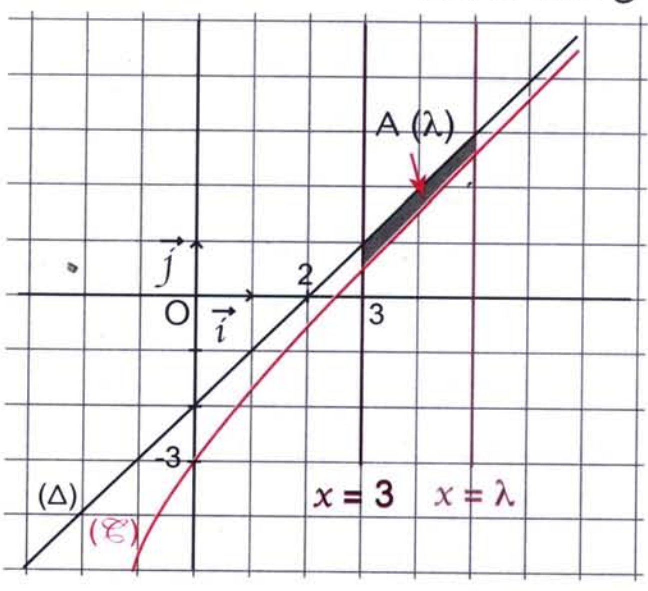
ينتج أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

5. إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $2 < x_0 < 3$.

الدالة f معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[2 ; 3]$.



لدينا $f(2) = -\frac{1}{e^2}$ ؛ أي $f(2) < 0$

و $f(3) = 1 - \frac{1}{e^3}$ ؛ أي $f(3) > 0$

و بالتالي $f(2).f(3) < 0$

إذن المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $2 < x_0 < 3$.

6. رسم المنحنى $(\mathscr{C})$.

7. حساب المساحة $A(\lambda)$.

لدينا $A(\lambda) = \int_3^{\lambda} [(x - 2) - f(x)]\, dx$

$= \int_3^{\lambda} e^{-x}\, dx$

الدالة $x \longmapsto -e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto e^{-x}$ على المجال $[3 ; \lambda]$ حيث $\lambda > 3$.

ينتج أن $A(\lambda) = [-e^{-x}]_3^{\lambda}$

$= -e^{-\lambda} + e^{-3}$

و بالتالي $A(\lambda) = -e^{-\lambda} + \frac{1}{e^3}$ (وحدة المساحات).

• حساب نهاية $A(\lambda)$ لما تؤول λ إلى $+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \left(-e^{-\lambda} + \frac{1}{e^3}\right) = \frac{1}{e^3}$ لأن $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} = 0$

و بالتالي $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \frac{1}{e^3}$.

استعمال الترميز e^x

1 بسط العبارت التالية :

$e^{2x}e^{3x}$ ؛ $e^x e^{-2x}$ ؛ $e^{1-x}e^{3x+3}$ ؛ $(e^{3x})^2$

$(e^x)^{-2}$ ؛ $e^{\frac{1}{2}}e^{-2}$ ؛ $\frac{e^5}{e^2}$ ؛ $\frac{e^{-0,2}}{e^{0,2}}$

2 عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\frac{e^x+1}{2e^x+1} = a + \frac{be^x}{2e^x+1}$

3 عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x، $\frac{e^{2x}}{e^x+4} = ae^x + b + \frac{ce^x}{e^x+4}$

حساب نهايات

4 عين النهايات التالية :

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$ ؛ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x e^{\frac{1}{x}}$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - e^x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x+1}$ ؛ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x+1}$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{1 + e^x}$ ؛ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (2xe + 3 - 5e^x)$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^2 + x - 5)e^x$

تعيين دوال مشتقة

5 في كل حالة من الحالات التالية، عين مجموعة تعريف الدالة f و دالتها المشتقة f'.

$f(x) = 2e^x$ ؛ $f(x) = e^{3x+1}$

$f(x) = e^{3-x}$ ؛ $f(x) = e^{\sin 2x}$

$f(x) = \sqrt{e^x}$ ؛ $f(x) = (3x+1)e^x$

$f(x) = (x^2 - 2x)e^{-x}$ ؛ $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

$f(x) = \frac{5e^x - 1}{1 - e^x}$ ؛ $f(x) = e^x \sin x$

$f(x) = e^{-x}(\cos 3x - \sin 3x)$

حل معادلات و متراجحات

6 حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلات التالية :

$e^x = 1$ ؛ $e^{x^2} = e^{25}$ ؛ $e^{5x-1} = e^{x^2+5}$

$e^{\sin x} = e^{\cos x}$ ؛ $e^x + 1 = \frac{2}{e^x}$ ؛ $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$

$e^{4x} - e^{2x} = 0$ ؛ $e^x + e^{-x} = 2$

$e^{2x} + 2e^{-x} - 3 = 0$ ؛ $e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$

7 حل في $\mathbb{R}$ كلا من المتراجحات التالية :

$e^x \geq \sqrt{e}$ ؛ $e^{x^2-2} \leq e^{4-x}$ ؛ $e^{2x} - e^x < 0$

$e^{2x} + 2e^x - 3 \geq 0$ ؛ $e^{4x} + 5e^{2x} - 6 \leq 0$

$e^{x^2} \times e^x < (e^3)^2$ ؛ $e^{2x} > e^{x+1}$

حساب دوال أصلية

8 في كل حالة من الحالات التالية، عيّن دالة أصلية للدالة f على المجال I.

$f(x) = e^{-x}$ ؛ $I = \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{2}e^{3x} - 5e^{2x}$ ؛ $I = \mathbb{R}$

$f(x) = xe^{x^2}$ ؛ $I = [0 ; +\infty[$

$f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ ؛ $I = \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{-e^x}{(e^x+3)^2}$ ؛ $I = \mathbb{R}$

9 عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$F(x) = (a\sin x + b\cos x)e^x$

دالة أصلية للدالة f

حيث $f(x) = (5\sin x - \cos x)e^x$

مسـائـل

10 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x) = e^x - e^{-x}$

1 . حل المعادلة $f(x) = 0$ في $\mathbb{R}$.

2 . عيّن النهايتين التاليتين :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3 . ادرس تغيرات الدالة f.

4 . ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

5 . حل بيانيا المعادلة $f(x) = k$ حيث k عدد حقيقي.

6 • λ عدد حقيقي موجب تماما.
أحسب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 0$ و $x = \lambda$. حيث $\lambda > 0$.
احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} A(\lambda)$.

11 نعتبر الدالة f المعرفة بـ :

$$f(x) = 2e^{2x} + e^{x} - 3$$

ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 • تحقق من صحة المعلومات الواردة في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	-3	0	$+\infty$

(نظم المعلومات المقدمة وفق ترتيب منطقي).

2 • عيّن معادلة للمماس (T) للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة 0.

3 • ادرس إشارة العبارة $f(x) - 5x$ على $\mathbb{R}$.
استنتج الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المماس (T).

12 نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{x} + 1}$
و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 • عيّن مجموعة تعريف الدالة f.

2 • احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3 • بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛
$f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4 • أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

5 • بيّن أن النقطة $A\left(0 ; \dfrac{1}{2}\right)$ مركز تناظر $(\mathscr{C})$.

6 • عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند النقطة A.

7 • نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي :

$$g(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - f(x)$$

أ) • حلل العبارة $e^{2x} - 2e^{x} + 1$

ب) • احسب $g'(x)$ و $g(0)$. ادرس تغيرات g.

ج) • استنتج الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المماس (T).

8 • ارسم (T) و $(\mathscr{C})$.

13 (I_n) متتالية معرفة كما يلي :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$$

1 • احسب I_1.

2 • برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$$

3 • احسب I_2 و I_3.

14 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :
$f(x) = xe^{-x}$ و λ عدد حقيقي موجب تماما.

1 • ادرس تغيرات الدالة f.

2 • ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. الوحدة 4 cm.

3 • باستعمال المكاملة بالتجربة، احسب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 0$ و $x = \lambda$ على الترتيب.
ادرس نهاية $A(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$.

15 1 • نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = e^{x} - x - 1$

- ادرس تغيرات الدالة g.
- احسب $g(0)$.

2 • استنتج أن العبارة $\dfrac{e^{x}}{e^{x} - x}$ موجبة من أجل كل عدد حقيقي x.

3. نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$$

- تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(x) > 0$

- احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

4. بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$$f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$$

استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

5. ادرس تغيرات الدالة f.

6. $(\mathscr{C})$ هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$.

- ارسم $(\mathscr{C})$ في المعلم السابق.

16 نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة 1 cm.

1. عين مجموعة تعريف الدالة f.

2. ادرس تغيرات الدالة f.

3. بيّن أن $f(x)$ يكتب على الشكل $f(x) = a + \dfrac{b}{e^x + 1}$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

4. بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ و استنتج أن الدالة f فردية.

5. أثبت أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف.

6. عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند النقطة التي فاصلتها 0.

7. ادرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المماس (T).

8. ارسم المماس (T) و المنحنى $(\mathscr{C})$.

17 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. الوحدة 1 cm.

لتكن f الدالة المعرفة بـ : $f(x) = (2 + \cos x)\, e^{1-x}$

و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.

1. عين مجموعة تعريف f.

2. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) > 0$

3. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$$

استنتج أن من أجل كل عدد حقيقي x

$$2 + \cos x + \sin x > 0$$

4. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x

$$e^{1-x} \leq f(x) \leq 3\, e^{1-x}$$

استنتج نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$.

5. أثبت أن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

أنجز جدول تغيرات الدالة f.

6. ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$.

7. بيّن أن المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا واحدا α حيث $0 < \alpha < \pi$.

8. ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$.